где Θ -форма Пфаффа, являющаяся полным дифференциалом, то из (2.6) следует, что $d^m \mathcal{F}_i$ $(m=1,2,\ldots)$ не могут содержать члена с $(x^0)^2$.

Значит, координаты точки A_0 удовлетворяют системе уравнений (1.6) при любом натуральном m. Теорема доказана.

Из этой теоремы следует, что введенное в [1] понятие ранга в случае невырождающихся фокальных многообразий содержательно только для рангов 1,2,3.

Список литературы

1. М а х о р к и н В.В. Некоторые типы многообразий гиперквадрик.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур. Вып. 3. Калининград, 1973, с.50-59.

2. М а л а х о в с к а я С.В. Конгруэнции линейчатых квадрик с кратной фокальной поверхностью.-В кн.: Дифференциальная геометрия многообразий фигур, Вып. 12, Калининград, 1981, с.44-47.

3. Л а п т е в Г.Ф. Распределение касательных элементов.- В кн.: Тр. геометрич. семинара, М., 1971, т.3, с 29-48.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып. 13 1982

П.Н. М и х а й л о в

О ПОВЕРХНОСТЯХ ПОСТОЯННОЙ СРЕДНЕЙ КРИВИЗНЫ

В работе рассмотрены поверхности постоянной средней кривизны $V_p \in E_n$ и общего вида. Выделены необходимые и достаточные условия постоянства средней кривизны на V_p. Дана сетевая характеристика поверхностей, отличных от поверхности постоянной средней кривизны. Рассмотрены случаи расслоения гиперповерхности V_p на поверхности постоянной средней кривизны.

1. Пусть задана неминимальная поверхность $V_p \subset E_n$. Отнесем поверхность V_p к подвижному полуортогональному реперу $\{x, \vec{e}_i\}$, где орты $\vec{e}_i$ $(i=1,\ldots,p)$ принадлежат касательной плоскости $T_p(x)$ к поверхности в точке x, а векторы $\vec{e}_\alpha$ $(\alpha,\beta=\overline{p+1,n})$ образуют ортонормированный базис ортогонального дополнения $N_{n-p}(x)$ касательной плоскости, причем первые q векторов $\vec{e}_a$ $(a,b=\overline{p+1,p+q})$ из системы $\{\vec{e}_\alpha\}$ расположены в главной нормали $N_q(x) \subset N_{n-p}(x)$ поверхности [1].

Инфинитезимальные перемещения такого репера определяются дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x} = \omega^i \vec{e}_i, \quad d\vec{e}_i = \omega_i^j \vec{e}_j + \omega_i^a \vec{e}_a,$$

$$d\vec{e}_a = \omega_a^i \vec{e}_i + \omega_a^b \vec{e}_b + \omega_a^\sigma \vec{e}_\sigma, \tag{1}$$

$$d\vec{e}_\sigma = \omega_\sigma^a \vec{e}_a + \omega_\sigma^\gamma \vec{e}_\gamma \quad (\sigma,\gamma=\overline{p+q+1,n}).$$

Следовательно, $\omega^\alpha = 0$, что при продолжении приводит к уравнениям:

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha, \quad b_{ij}^\alpha = b_{ij}^\alpha, \tag{2}$$

где функции b^{α}_{ij} определяют поле второго основного тензора поверхности V_p, причем $b^{\sigma}_{ij}=0$. В силу выбора репера имеем:

$$\omega^{\beta}_{\alpha}+\omega^{\alpha}_{\beta}=0, \qquad (3)$$

$$\omega^{i}_{a}+\gamma^{ki}\,\omega^{a}_{k}=0, \qquad (4)$$

$$d\gamma_{ij}=\gamma_{ik}\,\omega^{k}_{j}+\gamma_{kj}\,\omega^{k}_{i}, \qquad (5)$$

где γ^{ki} -контравариантные компоненты метрического тензора $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\vec{e}_j$. Продолжение системы (2) имеет вид:

$$db^{a}_{ij}-b^{a}_{ik}\,\omega^{k}_{j}-b^{a}_{kj}\,\omega^{k}_{i}+b^{b}_{ij}\,\omega^{a}_{b}=b^{a}_{ijk}\,\omega^{k} \qquad (6)$$

С каждой точкой $x\in V_p$ инвариантным образом связан вектор средней кривизны

$$\vec{M}=\frac{1}{p}\gamma^{ij}b^{a}_{ij}\vec{e}_a. \qquad (7)$$

2. Если ℓ произвольная линия поверхности $V_p\subset E_n$, то система ее дифференциальных уравнений имеет вид:

$$\omega^{i}=\ell^{i}\theta, \qquad (8)$$

где θ -параметрическая форма, $\mathcal{D}\theta=\theta\wedge\theta_1$ и

$$d\ell^{i}+\ell^{j}\omega^{i}_{j}-\ell^{i}\theta_1=\ell^{i}_{1}\theta.$$

Определим на поверхности $V_p\subset E_{p+q}$ $(q\le p)$ линии, вдоль которых вектор $\vec{M}$ переносится параллельно в связности нормального расслоения. Дифференцируя (7), получим, что направления, вдоль которых вектор $\vec{M}$ переносится параллельно, определяются из системы

$$\lambda^{a}_{i}e^{i}=0, \qquad (9)$$

где $\lambda^{a}_{i}=\gamma^{kj}b^{a}_{kji}$. Система (9) является однородной системой q уравнений от p переменных. В общем случае она имеет $(p-q)$ линейно независимых решений. В работе 6 показано, что система величин λ^{a}_{i} образует тензор, и поверхность $V_p\subset E_{p+q}$ является поверхностью постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда

$$\sum_{a}\gamma^{ij}b^{a}_{ij}\lambda^{a}_{k}=0. \qquad (10)$$

Из (9) и (10) видно, что справедлива

Т е о р е м а 1. На поверхности постоянной ненулевой средней кривизны $V_p\subset E_{p+q}$ существует по крайней мере $(p-q+1)$ -мерное распределение, вдоль которого вектор средней кривизны $\vec{M}$ переносится параллельно.

3. Пусть на $V_p\subset E_n$ задано некоторое одномерное распределение Δ_1. Подвижной репер $\{x,\vec{e}_{\gamma}\}$ на V_p в точке x выберем так, чтобы $\vec{e}_{k_0}\in\Delta_1(x)$. Тогда

$$\omega^{i}_{k_0}=a^{i}_{k_0 j}\,\omega^{j},\ (i\ne k_0) \qquad (11)$$

Рассмотрим вектор $\vec{M}'_{k_0}=\gamma^{ij}b^{a}_{ijk_0}\vec{e}_a$. В силу (11) можно показать, что $\delta\vec{M}'_{k_0}=0$ (δ -символ дифференцирования по вторичным параметрам). Таким образом, каждому одномерному распределению Δ_1 на поверхности V_p соответствует некоторое инвариантное нормальное векторное поле.

Можно показать, что $\vec{M}'_{k}=0$ тогда и только тогда, когда вектор $\vec{M}$ на поверхности V_p переносится параллельно в направлении $\{\omega^{k_0}\}$.

Если на поверхности V_p задана некоторая сеть Σ_p, то в каждой точке поверхности инвариантным образом определяются p векторов $\vec{M}'_i$. Тогда в силу (10) справедлива

Т е о р е м а 2. Поверхность $V_p\subset E_{p+q}$, отнесенная к произвольной сети Σ_p, есть поверхность постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{M}'_i$, определенные для одномерных направлений, определенных сетью Σ_p, удовлетворяют условию

$$\vec{M}'_i\cdot\vec{M}_i=0. \qquad (12)$$

Из теоремы 2 вытекают:

С л е д с т в и е 1. Поверхность $V_p\subset E_{p+2}$ есть поверхность постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{M}'_i$ коллинеарны направляющему вектору нормали, ортогональной к средней.

С л е д с т в и е 2. Гиперповерхность V_p есть поверхность постоянной средней кривизны тогда и только тогда, когда все векторы $\vec{M}'_i$ равны нулю.

Пусть на поверхности $V_p \subset E_n$ существует $(p-q+1)$-мерное распределение, вдоль которого $\vec{M}_n$ переносится параллельно. Допустим, что поверхность V_p допускает каноническую сеть распределения Δ_{p-q+1} [4]. Обозначим эту сеть $\Sigma_p(\Delta_{p-q+1})$. Тогда в силу теоремы 2 справедливо

С л е д с т в и е 3. Поверхность $V_p \subset E_n$, несущая сеть $\Sigma_p(\Delta_{p-q+1})$, где Δ_{p-q+1} – распределение, вдоль которого вектор средней кривизны переносится параллельно, есть поверхность постоянной кривизны тогда и только тогда, когда векторы $\vec{M}'_\xi$, определенные для линий сети, принадлежащих распределению Δ_{q-1} – ортогонально-дополнительному распределению Δ_{p-q+1}, ортогональны вектору средней кривизны.

4. Рассмотрим произвольную поверхность $V_p \subset E_n$ не являющуюся поверхностью постоянной кривизны.

Вектор $\vec{e}_{p+1}$ репера $\{x, \vec{e}_y\}$ направим по средней нормали. Тогда система величин λ^{p+1}_k образует ковектор. Распределение Δ_{p-1}, определенное на V_p ковектором λ^{p+1}_k, вполне интегрируемо. Поверхность V_p в направлении Δ_1, ортогональном Δ_{p-1}, расслаивается на поверхности V_{p-1} поверхности уровня средней кривизны M). Аналогично, если поверхность V_{p-1} не является поверхностью постоянной средней кривизны, то в некотором направлении $\tilde{\Delta}_1$ поверхность V_{p-1} расслаивается на поверхности V_{p-2} поверхности уровня средней кривизны M_1 поверхности V_{p-1}) и т.д.

Таким образом, на поверхности $V_p \subset E_n$ выделяются p ортогональных векторных полей. Интегральные кривые этих векторных полей определяют на поверхности V_p ортогональную сеть, которую обозначим Σ'_p.

Из сказанного выше видно, что справедлива

Т е о р е м а 3. Любая поверхность $V_p \subset E_n$ либо является поверхностью постоянной средней кривизны, либо расслаивается на поверхности постоянной средней кривизны, либо несет сеть Σ'_p.

Сравним сеть Σ'_p на гиперповерхностях V_p с некоторыми известными сетями.

Т е о р е м а 4. Если гиперповерхность V_p несет сеть Σ'_p, совпадающую с сетью линий кривизны, то поверхность есть либо p-ортогонально-сопряженная система, либо векторы вынужденных кривизн некоторых линий сети совпадают и поверхность в направлении остальных линий расслаивается на гиперсферы.

Т е о р е м а 5. Если на гиперповерхности V_p сеть Σ'_p является геодезической сетью, то векторы средних кривизн подповерхностей и вектор средней кривизны поверхности V_p коллинеарны.

Выясним, в каком случае гиперповерхность V_p расслаивается в выделенном выше направлении на поверхности постоянной средней кривизны.

Т е о р е м а 6. Пусть на $V_p \subset E_{p+1}$ распределение Δ_{p-1}, определенное ковектором λ^{p+1}_k, является T-минимальным [4]. Тогда V_p в направлении Δ_1, ортогональном к Δ_{p-1}, расслаивается на поверхности постоянной ненулевой средней кривизны тогда и только тогда, когда вынужденная кривизна интегральных линий распределения Δ_1 постоянна в направлении Δ_{p-1}.

Т е о р е м а 7. Поверхность $V_p \subset E_{p+1}$ расслаивается в направлении Δ_1 на минимальные поверхности тогда и только тогда, когда распределение Δ_{p-1} T-минимально и вынужденная кривизна интегральных линий распределения Δ_1 равна p-кратной средней кривизне поверхности V_p.

Список литературы

1. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве. – Лит. матем. сб., 1966, 6, №4, с. 475–491.

2. Г р и г о р ь е в И.Н. Асимптотические преобразования P-ортогонально-сопряженных систем в n-мерном пространстве. – ДАН СССР, 1954, 97, с. 765–767.

3. К у з ь м и н М.К. О канонических сетях распределений на поверхностях евклидова пространства. – Проблемы

геометрии.Итоги науки и техники,1975,7,с.231-248.

4.Л а п т е в Г.Ф.Дифференциальная геометрия погруженных многообразий.-Труды Моск.матем.об-ва,1953,2, с.275-382.

5.М и х а й л о в П.Н. К геометрии поверхностей постоянной средней кривизны.-В сб.:"Геометрия погруженных многообразий".М.,1980,с.62-66.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР

Вып.13 1982

Ж. Н у р п е и с о в

К ГЕОМЕТРИИ ИНТЕГРИРУЕМЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В E_n

В настоящей работе рассмотрены некоторые геометрические свойства ($n-1$)-распределения в евклидовом пространстве E_n.

Пусть n-мерное евклидово пространство E_n отнесено к подвижному реперу $R^x=(x,\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$,инфинитезимальное перемещение которого определяется дифференциальными уравнениями:

$$d\vec{x}=\omega^J\vec{e}_J,\quad d\vec{e}_J=\omega_J^K\vec{e}_K, \tag{1}$$

$$(J,K,L,\dots=1,2,\dots,n;\quad i,j,k,\dots=1,2,\dots,n-1).$$

Формы ω^J и ω_J^K удовлетворяют структурным уравнениям:

$$\mathcal{D}\omega^J=\omega^K\wedge\omega_K^J,\quad \mathcal{D}\omega_J^K=\omega_J^L\wedge\omega_L^K. \tag{2}$$

Пусть в некоторой области $G\subset E_n$ задана вещественная функция $f(x^1,x^2,\dots,x^n)$.Условие $f=const$ расслаивает область G на ∞^1 поверхностей V_{n-1} (поверхностей уровня этого инварианта),касательные пространства к этим поверхностям задают в области G $(n-1)$-распределение Δ_{n-1}.

Векторы $\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_{n-1}$ репера расположим в площадке $\Delta_{n-1}(x)$.Тогда дифференциальные уравнения распределения будут:

$$\omega_i^n=\Lambda_{iK}^n\omega^K,\quad (\Lambda_{ij}^n=\Lambda_{ji}^n). \tag{3}$$

Вектор $\vec{e}_n$ репера R^x направим по направлению X, ортогональному площадке $\Delta_{n-1}(x)$.Получим $\vec{e}_i\cdot\vec{e}_n=0$,